

# Лекция 5



**Жан Батист Жозеф  
Фурье  
1768 - 1830**

Французский математик, физик.

Почётный член многих академий, в т.ч. Петербургской. Труды по алгебре, дифференциальным уравнениям и математической физике. Его «Аналитическая теория тепла» привела к созданию теории тригонометрических рядов (рядов Фурье), теории множеств и теории функций.

Активный общественный деятель времен Французской Революции и Наполеона Бонапарта.



Немецкий математик,  
внёс существенный вклад в  
математический анализ,  
теорию рядов, теорию  
функций и теорию чисел.  
Ученик Ж.Фурье.

Среди его учеников  
Риман, Дедекин, Кронекер.

Обосновал плодотворный  
*Принцип Дирихле* в теории  
потенциала.

Ио́ганн Пе́тер Гу́став  
Лежён **Дирихле**  
**1805 - 1859**

# Ряды Фурье

Простой периодический процесс (*простое гармоническое колебание*) описывается функцией

$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$A$  – амплитуда,  $\omega$  – частота,  $\varphi_0$  – начальная фаза.

*Сложное гармоническое колебание:*

$$f(t) = A_0 + A_1 \sin(t + \varphi_1) + A_2 \sin(2t + \varphi_2) + \dots$$

или

$$f(t) = A_0 + (a_1 \sin t + b_1 \cos t) + (a_2 \sin 2t + b_2 \cos 2t) + \dots$$

Любую периодическую функцию можно представить в виде суммы простых гармоник.

## Тригонометрический ряд Фурье для функции $f(x)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + (a_1 \sin x + b_1 \cos x) + (a_2 \sin 2x + b_2 \cos 2x) + \dots$$

или

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Функции  $f(x)$  и  $g(x)$  ортогональны на  $[a;b]$ , если

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = 0$$

**Лемма.** Семейство функций

$$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \sin 3x, \cos 3x, \dots$$

обладает свойством ортогональности на  $[-\pi; \pi]$ .

**Доказательство.** Для  $n \neq m$  имеем

$$1) \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0$$

$$2) \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0$$

$$3) \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx dx = 0$$

$$4) \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx dx = 0$$

$$5) \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos mx dx = 0$$

$$6) \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi$$

$$7) \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi$$

Формулы 1) – 7) верны при замене  $[-\pi; \pi]$  на  $[0; 2\pi]$ .

# Вычисление коэффициентов Фурье

Пусть  $f(x)$  произвольная периодическая функция с периодом  $2\pi$ . Допустим, что она разложена в ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (*)$$

1. Проинтегрируем обе части (\*) на отрезке  $[-\pi; \pi]$  получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx = \pi a_0$$

Отсюда

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

2. Умножим обе части (\*) на  $\cos(nx)$  и проинтегрируем на отрезке  $[-\pi; \pi]$ . Получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = a_n \cdot \pi$$

Отсюда

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

3. Аналогично, получим

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$



# Условия разложимости функции в ряд Фурье

## Теорема Дирихле

Если  $2\pi$ -периодическая функция  $f(x)$  на  $[-\pi; \pi]$

1) кусочно-непрерывна (имеет конечное число точек разрыва I рода);

2) кусочно-монотонна;

Тогда ряд Фурье функции  $f(x)$  сходится к  $f(x)$  в точках непрерывности, а в каждой точке разрыва  $x_0$

принимает значение  $\frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}$

Условия Дирихле дают достаточные условия сходимости.

## Ряд Фурье для четных функций

- Если  $f(x)$  четная, то её ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

где

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

Такой ряд называется неполным рядом Фурье или рядом по косинусам.

# Ряд Фурье для нечетных функций

- Если  $f(x)$  нечетная, то её ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

Такой ряд также неполный ряд Фурье или ряд по синусам.

# Полезные формулы

При любом  $n$ :

$$\sin \pi n = 0; \quad \cos \pi n = (-1)^n;$$

$$\int_0^{\pi} x \cdot \sin nx dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad dv = \sin nx dx \\ du = dx \quad v = -\frac{\cos nx}{n} \end{array} \right| = x \cdot \left( -\frac{\cos nx}{n} \right) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n} dx =$$
$$= \frac{\pi}{n} \cdot (-1)^{n+1};$$

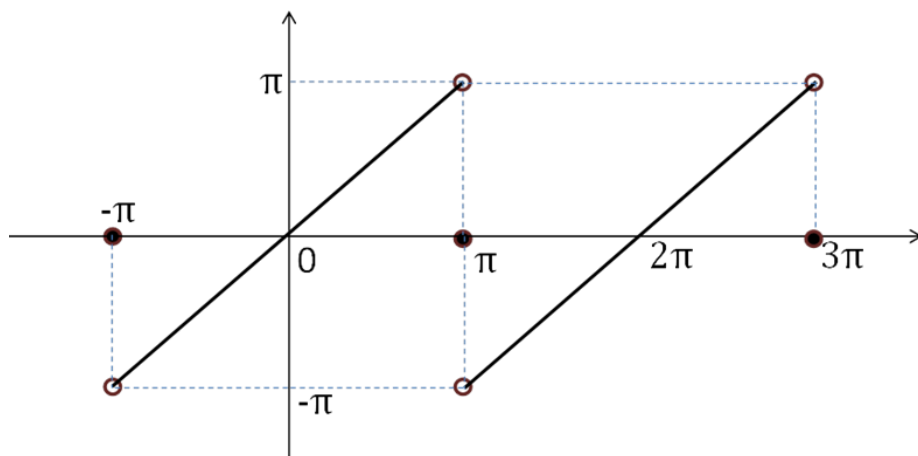
$$\int_0^{\pi} x \cdot \cos nx dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad dv = \cos nx dx \\ du = dx \quad v = \frac{\sin nx}{n} \end{array} \right| = x \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n} dx =$$
$$= \frac{\cos nx}{n^2} \Big|_0^{\pi} = \frac{(-1)^n - 1}{n^2};$$

Разложить в ряд Фурье функцию  $f(x) = x$  на отрезке  $[-\pi; \pi]$ , период  $T = 2\pi$ .

**Решение.** Функция – нечетная, поэтому  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \left( \frac{\pi}{n} \cdot (-1)^{n+1} \right) = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}$$

$$f(x) = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = 2 \cdot \left( \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right)$$



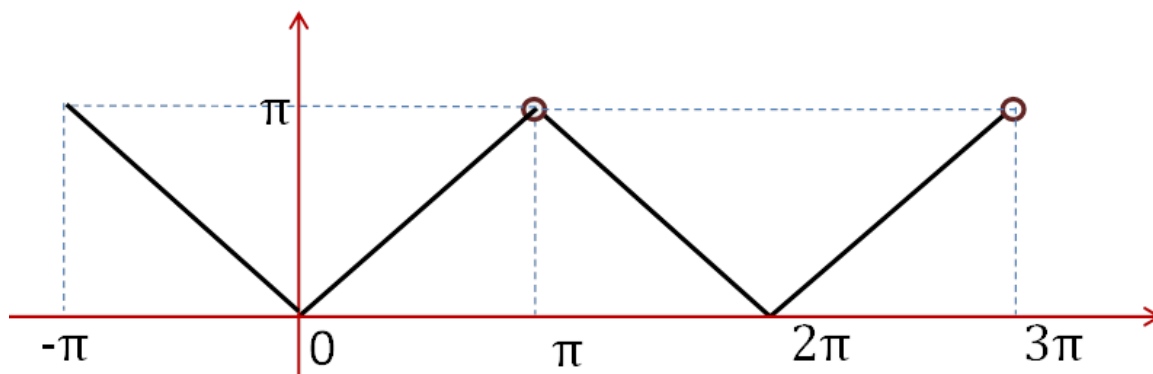
Разложить в ряд Фурье функцию  $f(x) = |x|$  на отрезке  $[-\pi; \pi]$  период  $T = 2\pi$ .

**Решение.** Функция – четная. Имеем

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

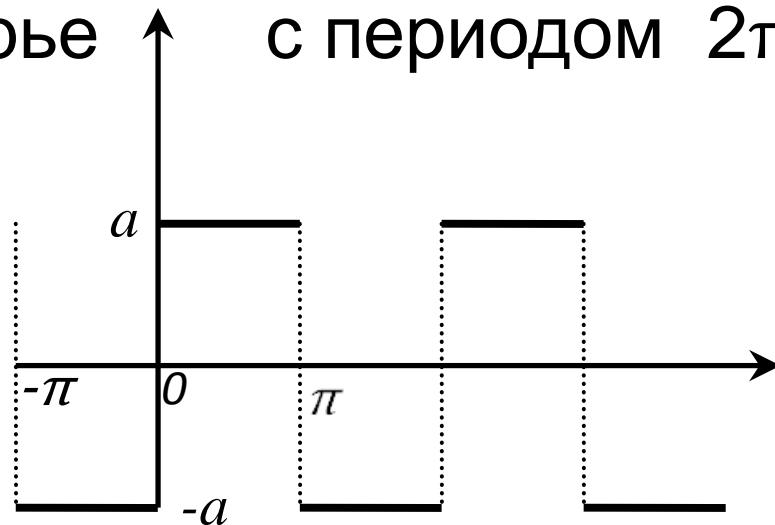
$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \frac{1}{\pi}; \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{n^2}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right)$$



Разложить в ряд Фурье функцию с периодом  $2\pi$

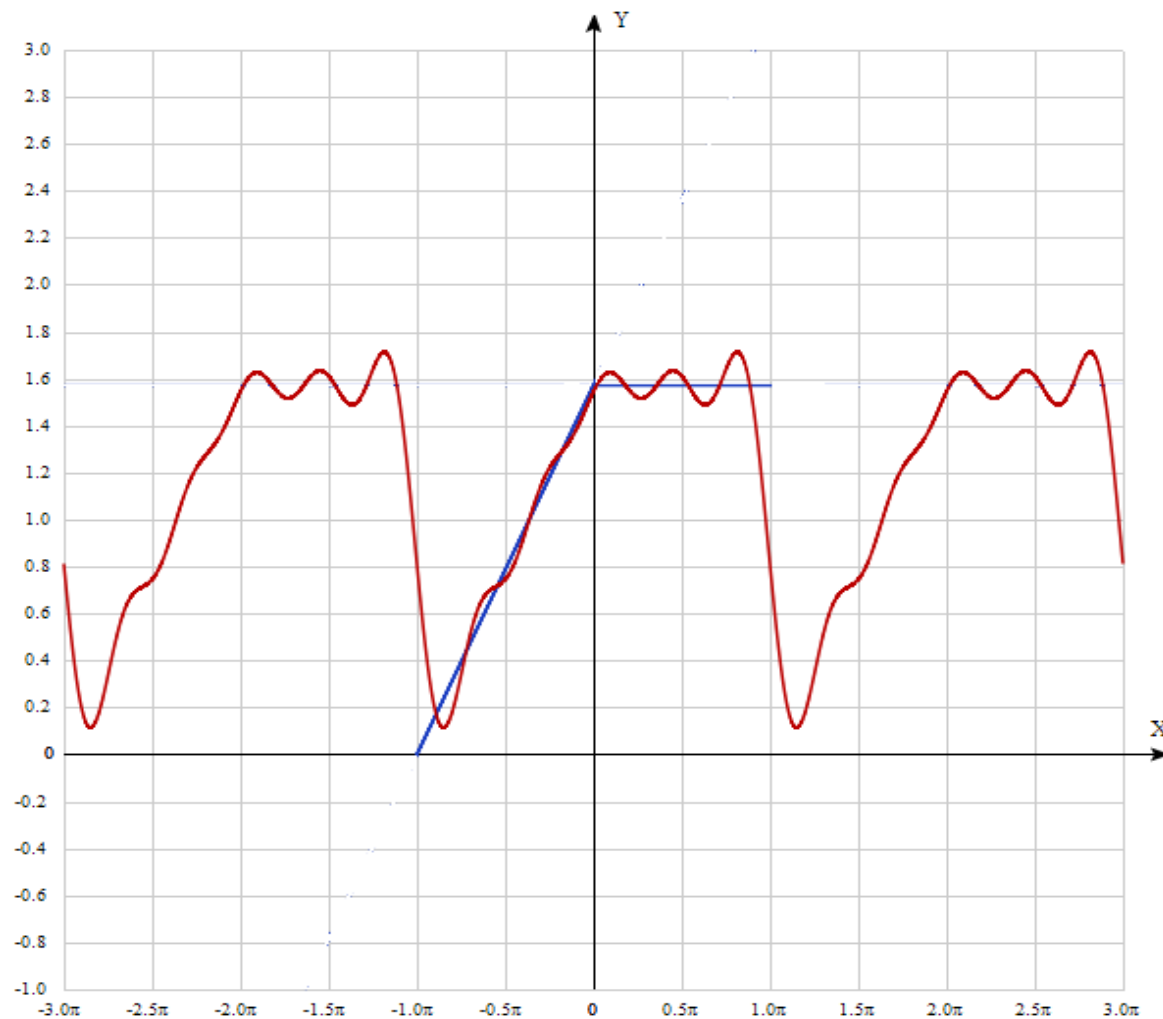
$$f(x) = \begin{cases} -a & \text{при } -\pi < x < 0 \\ a & \text{при } 0 < x < \pi \end{cases}$$



$$\tilde{f}(x) = \frac{4a}{\pi} \left( \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$$

График частичной суммы  $S_5(x)$   
ряда Фурье функции

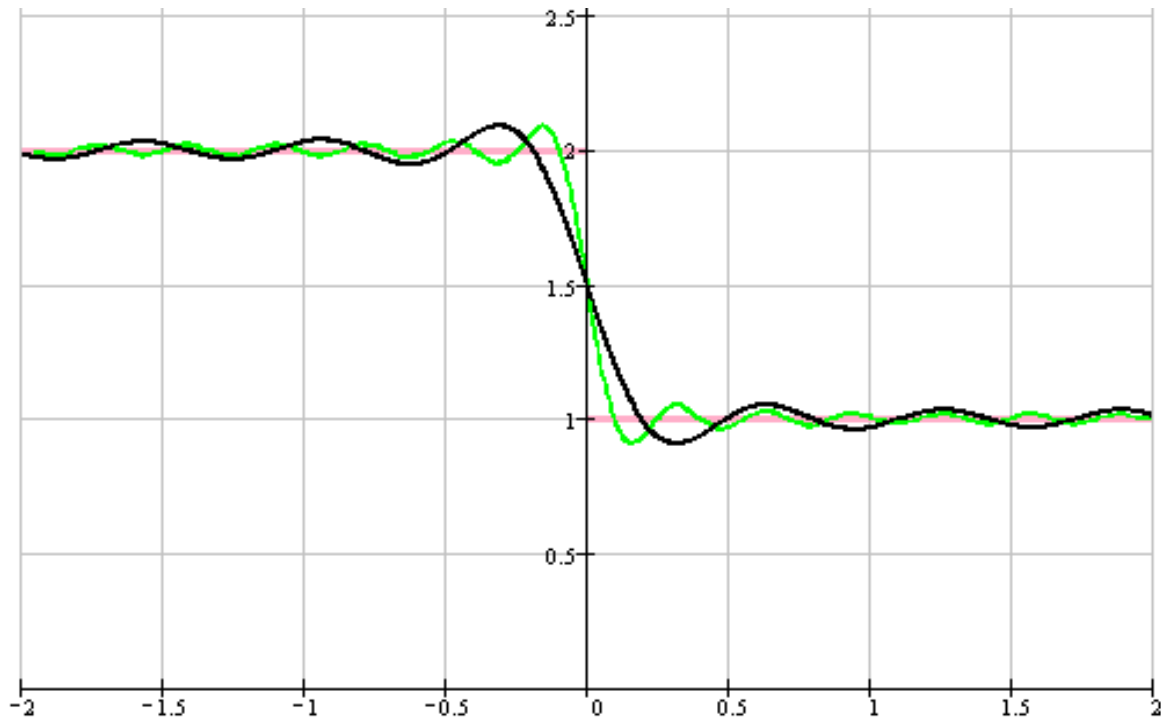
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x + \pi}{2}, & -\pi < x \leq 0 \\ \frac{\pi}{2}, & 0 < x < \pi \end{cases}$$





## Графики $S_3(x)$ и $S_5(x)$ ряда Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -2 < x \leq 0 \\ 1, & 0 < x < 2 \end{cases}$$



# Лекция 6

## Ряд Фурье для функций произвольного периода

Пусть  $f(x)$  определена на отрезке  $[-l; +l]$ , имеет период  $2l$  и удовлетворяет условиям Дирихле.

Подстановка  $x = \frac{l}{\pi}t$  преобразует функцию  $f(x)$  в функцию  $\varphi(t) = f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$ , определенную на отрезке  $[-\pi; \pi]$  и имеющую период  $T = 2\pi$ .

Функцию  $\varphi(t)$  можно разложить в ряд Фурье.

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

Возвращаясь к переменной  $x$ , получим

$$f(x) = \varphi\left(\frac{\pi}{l}x\right)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{\pi nx}{l} + b_n \sin \frac{\pi nx}{l} \right)$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi nx}{l} dx$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi nx}{l} dx$$

# Ряд Фурье для четных и нечетных функций с периодом $2l$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{l}$$

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{l}$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx$$

Разложить в ряд Фурье на отрезке  $[-3; +3]$  функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -3 \leq x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq 3 \end{cases} \quad T = 6$$

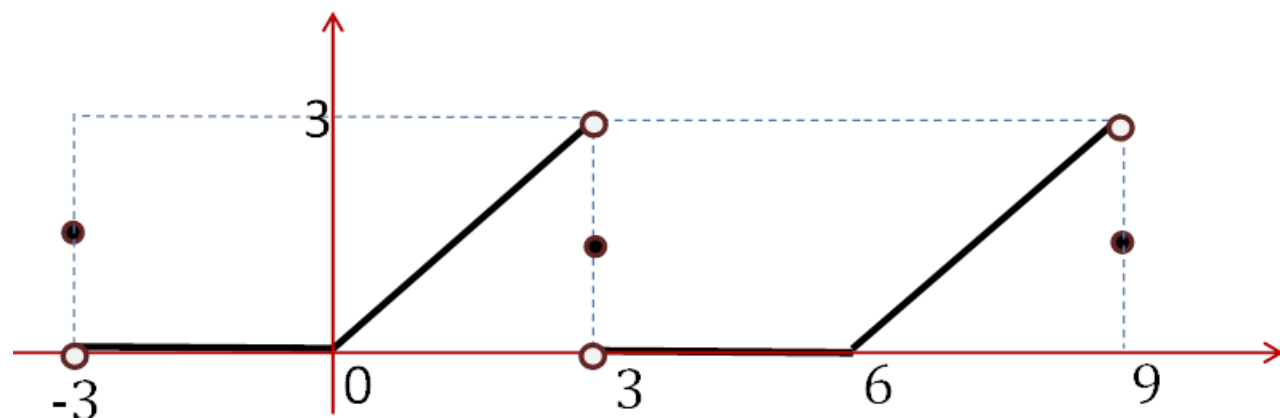
**Решение.**

$$a_0 = \frac{1}{3} \int_0^3 x dx = \frac{3}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{3} \int_0^3 x \cos\left(\frac{\pi n}{3} x\right) dx = \frac{3}{\pi^2 n^2} \left( (-1)^n - 1 \right)$$

$$b_n = \frac{1}{3} \int_0^3 x \sin\left(\frac{\pi n}{3} x\right) dx = \frac{3}{\pi n} (-1)^{n+1}$$

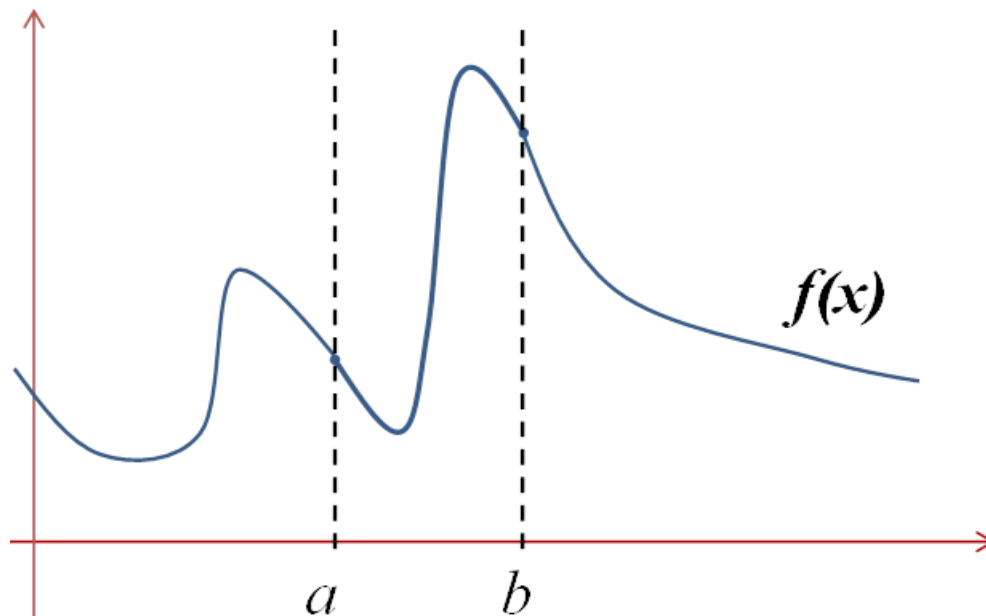
$$\tilde{f}(x) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\pi^2 n^2} \left( (-1)^n - 1 \right) \cos\left(\frac{\pi n}{3} x\right) + \frac{3}{\pi n} (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{\pi n}{3} x\right)$$



$$f(x) = \begin{cases} 0, & -3 \leq x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq 3 \end{cases} \quad T = 6$$

# Ряд Фурье для непериодических функций

Выделим участок функции, подлежащий разложению в ряд Фурье.

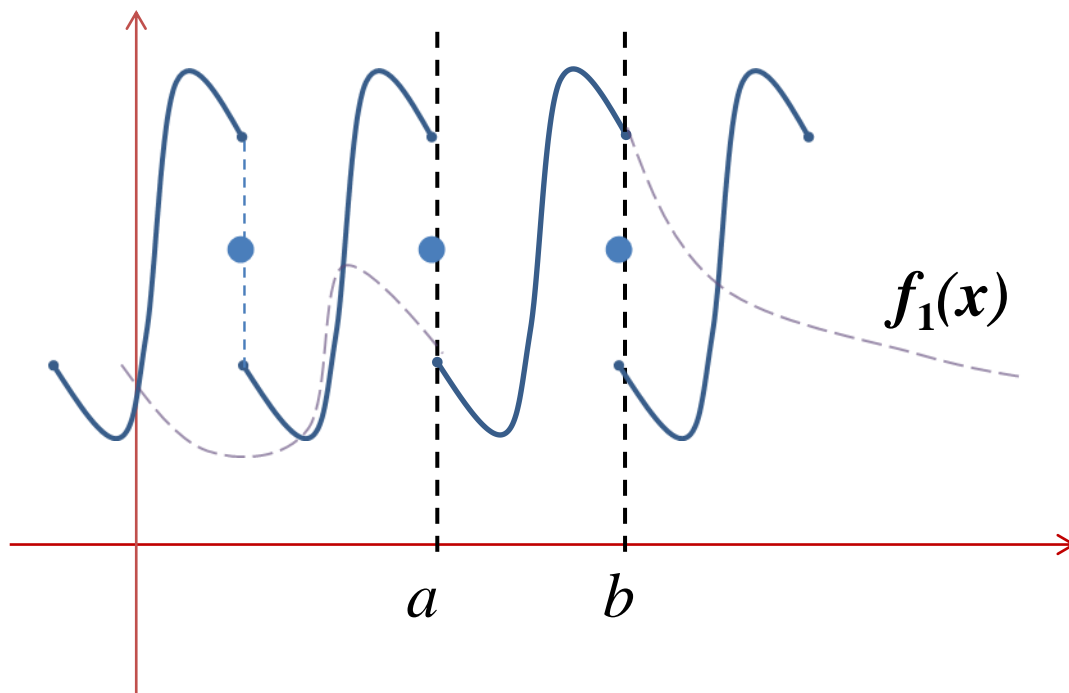


Разложим его как периодическую функцию с периодом

$$T = b - a, \quad l = \frac{b - a}{2}$$



Полученный ряд Фурье сходится к функции  $f(x)$  на участке  $(a; b)$ .



## Ряд Фурье в комплексной форме

Из формулы Эйлера  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$  следуют

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}; \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}; \quad \text{и отсюда:}$$

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}; \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i};$$

Подставим эти формулы в ряд Фурье, получим

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} - ib_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2} =$$

$$\left\langle \frac{1}{i} = -i \right\rangle$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx};$$

Здесь обозначено

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}; \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}; \quad c_0 = \frac{a_0}{2}.$$

Получим выражения для коэффициентов:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx - i \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos nx - i \sin nx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx; \end{aligned}$$

Аналогично, получим:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx$$

Окончательно имеем:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}; \quad - \text{ комплексная форма ряда Фурье}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad - \text{ комплексные коэффициенты ряда Фурье.}$$

В случае, если период функции равен  $2l$ :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i \frac{\pi n x}{l}}; \quad c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i \frac{\pi n x}{l}} dx; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$c_n e^{i \frac{\pi n x}{l}}$  - гармоники;

$c_n$  - комплексные амплитуды;

$\omega_n = \frac{\pi n}{l}$  - волновые числа;

$\{|c_1|, |c_2|, \dots, |c_n|, \dots\}$  - амплитудный спектр;

$\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}$  - частотный (волновой) спектр;

$\{\varphi_n = -\arg c_n\}$  - фазовый спектр.

# Интеграл Фурье

Пусть  $f(x)$  определена на всей числовой оси, удовлетворяет условиям Дирихле на любом конечном промежутке  $[-l; +l]$  и абсолютно интегрируема:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = M < \infty$$

Обозначим  $\omega_n = \frac{\pi n}{l}$ ;  $\Delta\omega_n = \frac{\pi}{l}$ .

Подставим в формулу ряда Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n x + b_n \sin \omega_n x)$$

выражения для коэффициентов  $a_n, b_n$ .

Получим:

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) (\cos \omega_n t \cdot \cos \omega_n x + \\ + \sin \omega_n t \cdot \sin \omega_n x) dt$$

т.е.

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) \cdot \cos \omega_n (t - x) dt$$

где

$$\frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) \cdot \cos \omega_n (t - x) dt = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left( \int_{-l}^l f(t) \cdot \cos \omega_n (t - x) dt \right)}_{\varphi(\omega_n)} \Delta \omega_n$$

Будем неограниченно увеличивать  $l$ . ( $l \rightarrow \infty$ )



Тогда

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\omega_n) \Delta \omega_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi(\omega) d\omega;$$

Получим **интеграл Фурье** для функции  $f(x)$ :

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega(t-x) dt$$

или в виде

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x) d\omega$$

где

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt,$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt.$$

Если функция  $f(x)$  **четная**, то

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt \right) \cos \omega x d\omega$$

Если – **нечетная**, то

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt \right) \sin \omega x d\omega$$

В симметричной форме записи будем иметь:

- для четной функции

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \tilde{A}(\omega) \cos \omega x d\omega,$$

где  $\tilde{A}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt$  -

- косинус-преобразование Фурье;

- для нечетной функции

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \tilde{B}(\omega) \sin \omega x d\omega,$$

где  $\tilde{B}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt$

- синус-преобразование Фурье.